Top における interval $[0,1]$ の普遍性

Shotaro Toki*

2024 年 4 月

概要

[*1]実数の定義から入り，連続性に注目した抽象的な空間概念，位相空間を定義する．そして実数全体の部分空間である interval $I=[0,1]$ がその位相空間の世界の中でどのような位置づけになっているのかを見ていく．これが普遍性を考えるということである．普遍性が主役となる圏論という分野は，「ある対象をその中身ではなく，それが属す世界の中でどのような位置づけにあるかで認識する」という特徴があり，本文で圏論に直接触れることはないが，そのアイデアを見てもらいたい．
また実数パートでは，「高校数学から大学数学への架け橋感」を意識した．

このレジュメにおけるいくつかの注意を最初に述べる：

- 参考にしている書籍は，実数パートは [2]，位相パートは [3] であり，メインテーマである interval の普遍性は問題提起のみが [1] の付録に載っていた．
- 写像の合成は $\circ$ を使わず単に gf と書く．
- $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ としている．
- $\mathcal{P}(X)$ は X の冪集合を表す．
- 開区間 (a,b) と直積の元 (x,y) がどちらもよく出てくるので，混乱しないように注意していただきたい．
- 選択公理は言及なく使う．

1　実数体，位相空間

高校数学における実数の説明としては，「数直線上の点に対応する数」といったところであろう．つまり，数直線という視覚的情報に結び付けて定義している．高校 (数 3 を除く) でそのことに何か文句をいう人は滅多にいないと思うが，それはこの定義で皆，共通認識が取れていたからだ．しかし，話題が深くなるとそういうわけにもいかなくなる．意見の食い違いが起こる．そうなるとただの喧嘩になってしまう．なぜなら，定義が感覚を利用してのものであるため，どこかで説明が頭打ちになってしまうからだ．そこで，それを（一旦）乗り越えた大学数学への心構えとしては，モノを導入するときは，

それが満たして欲しい集合の言葉で書かれたいくつかのルール（公理という）を取り決める

というものがある．つまり，モノを「〜〜満たす集合」として定義するのである．

* © 2024 Shotaro Toki. All rights reserved.

[*1] 2024 年 4 月に都数での発表に向けて書いたものである．拙いがお許しあれ．

1.1 実数体の定義

それでは早速実数を導入していこう．考えるべきことは私たちが実数に何を求めるかである．あとはそれを書き下すだけである．

Definition 1. 実数の集合 $\mathbb{R}$ を以下の (R1)〜(R18) を満たす集合として定義する．
$a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$a+b, ab \in \mathbb{R}$ となり，以下が成り立つ．

(R1) $^{\forall}a, b \in \mathbb{R}, a+b = b+a$
(R2) $^{\forall}a, b, c \in \mathbb{R}, (a+b)+c = a+(b+c)$
(R3) $^{\exists}0 \in \mathbb{R}, ^{\forall}a \in \mathbb{R}, a+0 = a$
(R4) $^{\forall}a \in \mathbb{R}, ^{\exists}(-a) \in \mathbb{R}, a+(-a) = 0$

以上をもって $\mathbb{R}$ は $+$ に関して可換群であるという．また

(R5) $^{\forall}a, b \in \mathbb{R}, ab = ba$
(R6) $^{\forall}a, b, c \in \mathbb{R}, (ab)c = a(bc)$
(R7) $^{\forall}a, b, c \in \mathbb{R}, a(b+c) = ab+ac$
(R8) $^{\exists}1 \in \mathbb{R}, ^{\forall}a \in \mathbb{R}, a1 = a$
(R9) $^{\forall}a \in \mathbb{R}, ^{\exists}a^{-1} \in \mathbb{R}, aa^{-1} = 1$
(R10) $1 \neq 0$

以上をもって $\mathbb{R}$ は $+, \cdot$ に関して体であるという．また $2 := 1+1, 3 := 1+1+1, \cdots$ とする．
次に $\mathbb{R}$ の任意の 2 つの元に対して以下を満たす関係 $\leq$ が定まっている．

(R11) $^{\forall}a \in \mathbb{R}, a \leq a$
(R12) $^{\forall}a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a = b$
(R13) $^{\forall}a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \wedge b \leq c \Longrightarrow a \leq c$
(R14) $^{\forall}a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \vee b \leq a$
(R15) $^{\forall}a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \Longrightarrow a+c \leq b+c$
(R16) $^{\forall}a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Longrightarrow ab \geq 0$

(R11)〜(R14) をもって $\mathbb{R}$ は $\leq$ に関して全順序集合であるという．そして (R1)〜(R16) をもって $\mathbb{R}$ は $+, \cdot, \leq$ に関して順序体であるという．
次はアルキメデスの原理と呼ばれるものである．

(R17) $^{\forall}a, b \in \mathbb{R}, ^{\exists}n \in \mathbb{N}, na > b$

これはどんな実数も自然数倍で追いつくことができることを表している（$\mathbb{N}$ もちゃんと定義すべきであるが，時間の都合上割愛．1 を有限回足したものが自然数という認識で構わない）．
ここまでの公理は僕らの思う $\mathbb{Q}$ も満たしてしまう．そこで $\mathbb{Q}$ と区別すべく，区間縮小法と呼ばれる公理を最後に追加する．ただその前に数列の極限を導入しなくてはならない．

Definition 2. $|a| := \max\{a, -a\}$ とする．

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}$ の数列する．このとき，$a\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}, {}^{\exists}n_0\in\mathbb{N}, {}^{\forall}n\in\mathbb{N}, n_0\leq n \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

つまり「n を限りなく大きくしたとき，a_n は a に限りなく近づく」を「n を十分大きくすれば a_n と a の距離をどこまでも小さくできる」と読み替えたのである．

Example 1. $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0.$
実際，$\varepsilon > 0$ とすると，(R17) より，$\frac{1}{\varepsilon} < n_0$ となる $n_0\in\mathbb{N}$ が存在．ここで $n\in\mathbb{N}$ に対して，$n_0\leq n$ とすると，２項定理から

$$2^{-n} = \frac{1}{(1+1)^n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

とできる．

(R18)，区間縮小法を導入する．

(R18) $I_n = [a_n, b_n]$　$(a_n, b_n\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N})$ が任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$I_n\supset I_{n+1}$ となるとき，

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$$

また特に $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ のとき，

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\} \qquad ({}^{\exists}a\in\mathbb{R})$$

となり，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a.$

これは区間を限界まで狭めていったとき，最終的に一点に落ち着くということを表している．

以上で $\mathbb{R}$ が定義できた．しかし，本来はこれで終わりではない．このような性質を満たす $\mathbb{R}$ が本当に存在するのかを確かめなければならないのである．例えば集合 X を $1\in X$ かつ $1\notin X$ を満たす集合だとすると，このような X は当然存在しない．よって $\mathbb{R}$ を存在が認められている集合たちを使って構成しなくてはならないのだ．しかし，時間の都合上今回は省略する．実際に存在することはわかっているので問題はない．気になる方は「数学の基礎　東京大学出版会」を参考にされたい．

練習問題 1. (R1)〜(R18) を使って以下を示せ．(18 個の公理から僕らの期待する性質が導かれていくことを確認してほしいの意)
問１　$0a = 0$　　問２　$(-1)(-1) = 1$　　問３　$1 > 0$　　問４　$a\leq b\wedge c\leq d \Longrightarrow a + c\leq b + d$
問５　$|a + b|\leq |a| + |b|$　　問６　$\mathbb{R}$ に n 乗根が存在する（[2] の 1.3 例 3 参照）

1.2　連続写像

「x を a に限りなく近づけると $f(x)$ は限りなく $f(a)$ に近づいていく」を「x と a の距離を十分縮めれば $f(x)$ と $f(a)$ の距離はどこまでも小さくできる」と読み替えると連続性は以下のように定式化できる．

Definition 3. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ が $a\in\mathbb{R}$ において連続であるとは，

$${}^{\forall}\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}, {}^{\exists}\delta\in\mathbb{R}_{>0}, {}^{\forall}x\in\mathbb{R}, |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう.
また任意の $a \in \mathbb{R}$ において f が連続であるとき，f は連続写像であるという.

Example 2. 一次多項式によって表される写像は連続である.
実際に，$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) := ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ と定め，$c \in \mathbb{R}$ とし，f は c において連続であることを示す．$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ とする．$\delta := \frac{\varepsilon}{|a|}$ とし，$x \in \mathbb{R}$ に対して，$|x - c| < \delta$ とすれば,

$$|f(x) - f(c)| = |a||x - c| < \varepsilon$$

がいえる．よって，f は c において連続より，f は連続.

連続性を定義できたが，如何せん従属変数 (x, ε, δ) が多くすっきりしない．そこで以下 2 つの概念を定義し，連続の条件を言い換えていく.

Definition 4. $a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して,

$$B(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

とし，これを a の ε 近傍という.
$U \subset \mathbb{R}$ が開集合であるとは,

$$^{\forall} x \in U, ^{\exists} \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, B(x, \varepsilon) \subset U$$

であることがある．ここで $\mathbb{R}$ の開集合全体を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ とする.

Example 3. $x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ とすると，$B(x, \varepsilon)$ は開集合である.
実際，$y \in B(x, \varepsilon)$ とすると，$|y - x| < \varepsilon$ つまり $0 < \varepsilon - |y - x|$ より,

$$0 < \delta < \varepsilon - |y - x|$$

となる $\delta \in \mathbb{R}$ が存在する（$\delta := \frac{\varepsilon - |y-x|}{2}$ とすればよい）．$z \in B(y, \delta)$ とすると,

$$|z - y| < \delta < \varepsilon - |y - x|$$

より,

$$|z - x| \leq |z - y| + |y - x| < \varepsilon$$

となるため，$z \in B(x, \varepsilon)$．以上より，$B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$ から，$B(x, \varepsilon)$ が開集合であることがわかる.

ここで

$$\begin{aligned}
f \text{ が連続} &\Longleftrightarrow^{\forall} a \in \mathbb{R}, ^{\forall} \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, ^{\exists} \delta \in \mathbb{R}_{>0}, ^{\forall} x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow^{\forall} a \in \mathbb{R}, ^{\forall} \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, ^{\exists} \delta \in \mathbb{R}_{>0}, ^{\forall} x \in \mathbb{R}, x \in B(a, \delta) \Longrightarrow f(x) \in B\left(f(a), \varepsilon\right) \\
&\Longleftrightarrow^{\forall} a \in \mathbb{R}, ^{\forall} \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, ^{\exists} \delta \in \mathbb{R}_{>0}, ^{\forall} x \in \mathbb{R}, x \in B(a, \delta) \Longrightarrow x \in f^{-1}\left(B\left(f(a), \varepsilon\right)\right) \\
&\Longleftrightarrow^{\forall} a \in \mathbb{R}, ^{\forall} \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, ^{\exists} \delta \in \mathbb{R}_{>0}, B(a, \delta) \subset f^{-1}\left(B\left(f(a), \varepsilon\right)\right)
\end{aligned}$$

と近傍によって整理することができる．さらに開集合の言葉を使えば束縛変数を大幅にカットできる.

Proposition 1.

$$f \text{ が連続} \Longleftrightarrow^{\forall} U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$$

Proof. ($\Longrightarrow$)　　$U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ とし，$f^{-1}(U)$ が開集合であることを示す．$x \in f^{-1}(U)$ とすると，$f(x) \in U$ であり，U が開集合であることから，$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，$B(f(x),\varepsilon) \subset U$．よって，仮定と合わせて

$$B(x,\delta) \subset f^{-1}\left(B\left(f(x),\varepsilon\right)\right) \subset f^{-1}(U) \qquad (^{\exists}\delta \in \mathbb{R}_{>0})$$

より，$f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$.
($\Longleftarrow$)　　$x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ とする．$B(f(x),\varepsilon) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ より，仮定から $f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ がいえる．$f(x) \in B(f(x),\varepsilon)$ より，$x \in f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right)$ から，$\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，$B(x,\delta) \subset f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right)$．よって f は連続.

□

以上によって，2つの’空間’の間の連続性が「集合とその開集合全体」だけで書けることがわかった．そこで開集合の性質をピックアップしてみる．

Proposition 2. $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ に関して以下が成り立つ.

- $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$
- $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，
$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$$
- $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ に対して，
$$\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$$

Proof. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x \in \varnothing$ が偽であるため，$\varnothing \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$.
$x \in \mathbb{R}$ に対して，$B(x,1) \subset \mathbb{R}$ より，$\mathbb{R} \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$.
$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ の族とする．$x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とすると，$\lambda_x \in \Lambda$ が存在して，$x \in U_{\lambda_x}$．よって，$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，$B(x,\varepsilon) \subset U_{\lambda_x} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ となるため，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$.
$\cap$ に関しては2つについてのみ示せばよい．$U, V \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ とする．$x \in U \cap V$ とすると，$\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ が存在し，$B(x,\varepsilon_1) \subset U$ かつ $B(x,\varepsilon_2) \subset V$．ここで $\varepsilon_3 := \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とすると，$B(x,\varepsilon_3) \subset U \cap V$．よって，$U \cap V \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$.　□

これらの性質のみで開集合を語り切れているかどうかは疑問だが，それは位相空間論を展開してみて実際に確かめてみよう．ただ今回展開するのはほんの一部である.

1.3　位相空間

以上の考察をもって位相空間論を少し展開する.

Definition 5. X を集合，$\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ とする．それらの組 $(X,\mathcal{O})$ が位相空間であるとは，

- $\varnothing, X \in \mathcal{O}$
- $\mathcal{O}$ の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，
$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$$

- $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{O}$ に対して，
$$\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathcal{O}$$

が成り立つことである．このとき $\mathcal{O}$ を X の位相という．

Example 4. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$ は位相空間になる．

Proposition 3. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$A \subset X$ とする．
$$\mathcal{O}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$
とすると，$(A, \mathcal{O}_A)$ は位相空間になる．このとき $(A, \mathcal{O}_A)$ を X の部分空間といい，$\mathcal{O}_A$ のことを A 上の相対位相という．

Proof. $\varnothing = \varnothing \cap A$ また $A = X \cap A$ より，$\varnothing, A \in \mathcal{O}_A$.
次に $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{O}_A$ の族とすると，$\lambda \in \Lambda$ に対して，$V_\lambda \in \mathcal{O}$ が存在して，$U_\lambda = V_\lambda \cap A$. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in \mathcal{O}$ より，
$$\begin{aligned}\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (V_\lambda \cap A) \\ &= \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A\right) \\ &= \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda\right) \cap A \in \mathcal{O}_A\end{aligned}$$

最後に，$U_1, U_2 \in \mathcal{O}_A$ とすると，$V_1, V_2 \in \mathcal{O}$ が存在して，$U_1 = V_1 \cap A$ かつ $U_2 = V_2 \cap A$. よって，$V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}$ より，
$$U_1 \cap U_2 = (V_1 \cap A) \cap (V_2 \cap A) = (V_1 \cap V_2) \cap A \in \mathcal{O}_A$$

□

Definition 6. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$f : X \longrightarrow Y$ とする．f が連続写像であるとは，
$$U \in \mathcal{O}_Y \Longrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$$
を満たすことをいう．

Example 5. $\mathrm{id}_X^{-1}(U) = U$ より，$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ は連続写像.

Definition 7. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$f : X \longrightarrow Y$ を連続写像とする．f が同相写像であるとは，連続写像 $g : Y \longrightarrow X$ が存在し，
$$gf = \mathrm{id}_X \qquad fg = \mathrm{id}_Y$$
となることをいう．このとき $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は同相，または位相同型であるといい，$X \simeq Y$ と書く．

Example 6. $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d$ に対して，$[a, b] \simeq [c, d]$. 実際 $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ を
$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$$

とし，

$$f^{-1}(x) = \frac{b-a}{d-c}(x-c) + a$$

とすると f の逆写像になる．よって $f(x)$ も $f^{-1}(x)$ も一次の多項式であるため，f, f^{-1} は連続．よって $[a,b] \simeq [c,d]$.
以降特に $I := [0,1]$ とし，上でつくった $[0,1]$ から $[0,2]$ への同相写像を δ とする．すると，δ は 2 倍する写像であり，δ^{-1} は $\frac{1}{2}$ 倍する写像である．

位相空間の間の連続性を調べるとき，開集合全体について逆像をとって調べなくとも，一部だけで済む場合が多い．つまり，開集合のなかでも' ベース' となっているものたちがいるわけで，その集まりを開基として以下で導入する．

Definition 8. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して，$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が開基であるとは，任意の $U = \mathcal{O}$ に対して，$\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ が存在し，

$$U = \bigcup \mathcal{U}$$

となることをいう．このとき $\mathcal{O} = \{\bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B}\}$.

連続性については，開集合全体ではなく開基についてのみ調べれば良い．

Proposition 4. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}_Y$ を Y の開基とする．このとき，

$$U \in \mathcal{B} \Longrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$$

ならば，f は連続である．

Proof. $U \in \mathcal{O}_Y$ とすると，$\mathcal{B}$ の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して，$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$．よって，

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{O}_X$$

□

Example 7. $\mathcal{I} := \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ とすると，これは $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ の開基になる．
実際に示す．$U \in \mathcal{O}_\mathbb{R}$ とする．$x \in U$ に対して，$\varepsilon_x > 0$ が存在して，$B(x, \varepsilon_x) \subset U$ となる．ここで

$$\mathcal{U} := \{B(x, \varepsilon_x) \mid x \in U\}$$

とすると，$B(x, \varepsilon_x) = (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$ より，$\mathcal{U} \subset \mathcal{I}$ であり，$x \in B(x, \varepsilon_x)$ より，$U = \bigcup \mathcal{U}$.

逆に，集合 X に対して，$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ がとある位相の開基となるのはどんなときだろうか．

Proposition 5. X を集合，$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ とする．$\mathcal{B}$ が以下を満たすとき，$\mathcal{O}_\mathcal{B} := \{\bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B}\}$ は X の位相となる:

- $X = \bigcup \mathcal{B}$
- $U, V \in \mathcal{B}, x \in U \cap V$ に対して，$W \in \mathcal{B}$ が存在して，$x \in W \subset U \cap V$

このとき，$\mathcal{O}_\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}$ で生成された位相という．

Proof. $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ が X の位相になることを示す．$X = \bigcup \mathcal{B}$ より，$X \in \mathcal{O}_\mathcal{B}$．また $\varnothing = \bigcup \varnothing \in \mathcal{O}_\mathcal{B}$．
$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ の族とすると，$\lambda \in \Lambda$ に対して，$\mathcal{U}_\lambda \subset \mathcal{B}$ が存在して，$U_\lambda = \bigcup \mathcal{U}_\lambda$ となる．このとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda \subset \mathcal{B}$ より，

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left(\bigcup \mathcal{U}_\lambda\right) = \bigcup \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda\right) \in \mathcal{B}$$

$U_1, U_2 \in \mathcal{O}_\mathcal{B}$ とすると，$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{B}$ が存在して，$U_1 = \bigcup \mathcal{U}_1, U_2 = \bigcup \mathcal{U}_2$．ここで，

$$\mathcal{V} := \{W \in \mathcal{B} \mid W \subset U_1 \cap U_2\}$$

とすると，$\bigcup \mathcal{V} \subset U_1 \cap U_2$．また $x \in U_1 \cap U_2$ とすると，$A_1 \in \mathcal{U}_1, A_2 \in \mathcal{U}_2$ が存在し，$x \in A_1 \cap A_2$．$A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ より，$W \in \mathcal{B}$ が存在して，

$$x \in W \subset A_1 \cap A_2 \subset U_1 \cap U_2$$

よって，$W \in \mathcal{V}$ であり，$x \in \bigcup \mathcal{V}$ がいえるため，$U_1 \cap U_2 = \bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{O}_\mathcal{B}$． □

本当は上の条件の必要性 ($\mathcal{B}$ がとある位相の開基になるならば 2 つの条件が成り立つ) や，開基が生成する位相は一意であることなども確認しておきたいが，ここでは使わないので省く．

2 普遍性

以降，Set や Top といった未定義語が出てくるが，その本来の意味を知る必要はない (実際はそれぞれ集合の圏，位相空間の圏を表す)．「Set(Top) における」は「集合 (位相空間) の世界における」と訳し，単なる修飾語としてもらえればよい．

2.1 Set,Top における同型

$a \neq b$ のとき $\{a\} \neq \{b\}$ である．しかし，集合というのは，小学生に説明するとすれば「ものの集まり」なのであり，同じ一点集合なのだから，' 集合としては' 同じとみなしていいのではないのだろうか．ということで，以下を定義する．

Definition 9. X, Y を集合とする．$f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow X$ で

$$gf = \mathrm{id}_X \qquad fg = \mathrm{id}_Y$$

となるものが存在するとき，X, Y は Set において同型であるといい，$X \simeq_{\mathrm{Set}} Y$ と書く．これは X と Y が一対一対応であることに同値である．

これに乗じて，以降 X, Y が位相同型であることを $X \simeq_{\mathrm{Top}} Y$ と書くことにする．

2.2 Set における普遍性の例

これから Set における普遍性の例を見る．例えば $\varnothing$ や一点集合 $\mathbf{1}$ というのは「どんなものを元として含むか」と中身で定義されていると思う．普遍性というのは，それと対照的に，そのものの Set における周りとの関係に関する性質なのだ．そして集合と集合の間の関係は，上の同型の定義のときのように，写像によって言及される．つまり，

「そのものと任意の集合 X の間にどのような写像が入り入られるか」

が Set における普遍性になる．ただその性質によって，そのものが同型を除いて一意に決定されなくてはならない．

Proposition 6. 一点集合 $\mathbf{1} := \{a\}$ は以下を満たす：

任意の集合 X に対して，X から $\mathbf{1}$ への写像がただひとつ存在する

またそのような性質を満たす集合は同型を除いて一意であり，それを Set における終対象という．つまり $\mathbf{1}$ は Set における終対象である．

Proof. X を集合とする．$t(x) = a$ とする $t : X \longrightarrow \mathbf{1}$ をつくることができ，$f : X \longrightarrow \mathbf{1}$ とすると，$f(x) = a = t(x)$ となるため，$f = t$.
次に終対象の一意性を示す．T も終対象だとすると，$\mathbf{1}$ と T それぞれの終対象の性質から，

$$t_1 : T \longrightarrow \mathbf{1} \qquad t_2 : \mathbf{1} \longrightarrow T$$

が存在する．このとき, t_2t_1 と id_T はともに T から T への写像だが, T の終対象としての性質から, $t_2t_1 = \mathrm{id}_T$ がいえる．同様に $t_1t_2 = \mathrm{id}_{\mathbf{1}}$ もいえるため，$T \simeq_{\mathrm{Set}} \mathbf{1}$. □

つまり一点集合は Set の終対象とさえ覚えておけば，一点集合の中身による構成は忘れてしまっていいのである（一点集合は構成が簡単なのであまり恩恵が感じられないが）.

Proposition 7. 空集合 $\varnothing$ は以下を満たす：

任意の集合 X に対して，$\varnothing$ から X への写像がただひとつ存在する

またそのような性質を満たす集合は同型を除いて一意であり，それを Set における始対象という．つまり $\varnothing$ は Set における始対象である．

Proof. X を集合とする．$\varnothing \times X$ の部分集合は $\varnothing$ のみである．よって写像の条件は

$$^{\forall}p \left[p \in \varnothing \Longrightarrow \left[^{\exists!}y \in X, (p, x) \in \varnothing \right] \right]$$

と表せるため，$p \in \varnothing$ が偽より，これが真となり，$\varnothing$ は唯一の $\varnothing$ から X への写像となる．
始対象の一意性については，終対象のときと同様の論法. □

Definition 10. A, B を集合としたとき，

$$A \sqcup B := A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$$

とし，A と B の非交和という．このとき，

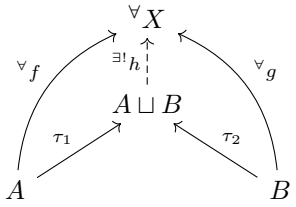
$$\tau_1 : A \longrightarrow A \sqcup B$$
$$\tau_2 : B \longrightarrow A \sqcup B$$

を $\tau_1(a) = (a, 0), \tau_2(b) = (b, 1)$ と定める．

つまり非交和とは，２つの集合を元を区別して足すことである．例えば一点集合と一点集合の非交和は二点集合になる．

Proposition 8. A, B を集合とする．$(A \sqcup B, \tau_1, \tau_2)$ は以下を満たす：

任意の集合 X，写像 $f : A \longrightarrow X, g : B \longrightarrow X$ に対して，$h : A \sqcup B \longrightarrow X$ が存在し，$f = h\tau_1, g = h\tau_2$.



また (X, t_1, t_2) もこの性質を満たすとすると，$A + B$ は X と同型であり，これを A, B の coproduct という．

つまり $(A \sqcup B, \tau_1, \tau_2)$ は A, B の coproduct である．

Proof. $f : A \longrightarrow X, g : B \longrightarrow X$ に対して，$h : A + B \longrightarrow X$ を

$$h(x) := \begin{cases} f(a) & x = (a, 0) \quad (^\exists a \in A) \\ g(b) & x = (b, 1) \quad (^\exists b \in B) \end{cases}$$

とすれば残りの条件を満たす．別の候補を取ってきても，可換性の条件からそれは h にならなくてはならない．

coproduct の一意性に関しては，基本終対象のときと同じ論法. □

2.3 Top における普遍性の例

Set において存在した終対象，始対象，coproduct が，位相空間の世界 Top において存在するのかを確認する．ここで見る対象は位相空間になるわけだが，ではその間の関係は何と見ればよいだろうか．先ほどは写像だった．写像で点と点の対応を見たのであった．今回，位相空間は点の集まりである集合に位相という付加構造がある．よって写像にその付加構造の対応を加味した連続写像を位相空間の間の関係として捉えよう．よって終対象，始対象，coproduct の statement は以下のようになり，その存在が確かめられる．

Definition 11. 以下を満たす位相空間 $(T, \mathcal{O})$ を Top における終対象という:

$$\text{任意の位相空間 } (X, \mathcal{O}_X) \text{ に対して，} X \text{ から } T \text{ への連続写像がただひとつ存在する}$$

このとき，終対象は位相同型を除いて一意である．

Proposition 9. Top において終対象は存在する．

Proof. $\mathbf{1} := \{a\}$ とし，$\mathcal{O}_\mathbf{1} := \{\varnothing, \{a\}\}$ とすると，$(\mathbf{1}, \mathcal{O}_\mathbf{1})$ は位相空間．$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とすると，$\mathbf{1}$ の Set における終対象の性質から，$t : X \longrightarrow \mathbf{1}$ がただひとつ存在し，これは $t^{-1}(\varnothing) = \varnothing, t^{-1}(\{a\}) = X$ より連続．よって，$(\mathbf{1}, \mathcal{O}_\mathbf{1})$ は Top における終対象となる． □

Remark 1. $\mathbf{1}$ に関しては以下が成り立つ：

$$X \simeq_{\mathrm{Set}} \mathrm{Set}(\mathbf{1}, X)$$

ただし，$\mathrm{Set}(\mathbf{1}, X)$ は $\mathbf{1}$ から X への写像全体である．これは元 $x \in X$ に対して，$\mathbf{1}$ の一点をその x に行かせるような写像を対応させているである．つまり，その写像は「x を指定するような写像」と表現することがで

きよう．よって，その記号の濫用ではあるが，その x を指定するような写像も $x : \mathbf{1} \longrightarrow X$ と文字 x を使用することが多く，以下そうする．
また X が位相空間のとき，写像 x は連続である．

Definition 12. 以下を満たす位相空間 $(P, \mathcal{O})$ を Top における始対象という:

任意の位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ に対して，P から X への連続写像がただひとつ存在する

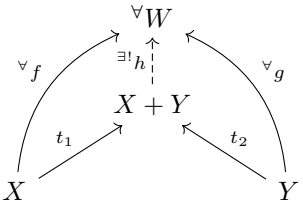
このとき，始対象は位相同型を除いて一意である．

Proposition 10. Top において始対象は存在する．

Proof. $\mathcal{O}_\varnothing := \{\varnothing\}$ とすると，$(\varnothing, \mathcal{O}_\varnothing)$ は位相空間．$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とすると，$\varnothing$ の Set における始対象の性質から，$t : \varnothing \longrightarrow X$ がただひとつ存在し，これは $t^{-1}(A) = \varnothing$ より連続．よって，$(\varnothing, \mathcal{O}_\varnothing)$ は Top における始対象となる． □

Definition 13. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．以下を満たす位相空間 $(X + Y, \mathcal{O}_+)$，連続写像 $t_1 : X \longrightarrow Z, t_2 : Y \longrightarrow Z$ の 3 つ組を Top における X, Y の coproduct という:

任意の位相空間 $(W, \mathcal{O}_W)$，連続写像 $f : X \longrightarrow W, g : Y \longrightarrow W$ に対して，連続写像 $h : X + Y \longrightarrow W$ が存在し，$f = ht_1, g = ht_2$.



このとき，coproduct は位相同型を除いて一意である (少々語弊ありなので気にしなくてもよい).

Proposition 11. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．Top において X, Y の coproduct は存在する．

Proof. $X + Y := X \sqcup Y$ とし，

$$\mathcal{O}_+ := \{U \sqcup V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

とすると，$(X + Y, \mathcal{O}_+)$ は位相空間.
次に τ_1, τ_2 が連続であることを示す．$\mathcal{O}_+$ も任意の元は，$U \sqcup V$ ($^\exists U \in \mathcal{O}_X, ^\exists V \in \mathcal{O}_Y$) ととれる．このとき

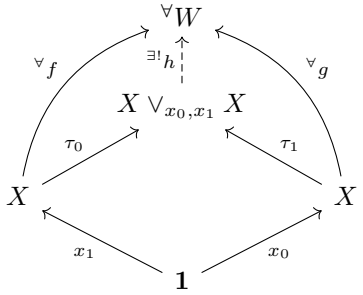
$$\tau_1^{-1}(U \sqcup V) = U \in \mathcal{O}_X \qquad \tau_2^{-1}(U \sqcup V) = V \in \mathcal{O}_Y$$

より，τ_1, τ_2 は連続.
$(W, \mathcal{O}_W)$ を位相空間，$f : X \longrightarrow W, g : Y \longrightarrow W$ を連続写像とすると，$X + Y = X \sqcup Y$ の Set における coproduct の性質から，$h : X + Y \longrightarrow W$ がただひとつ存在し，$f = h\tau_1, g = h\tau_2$．また $U \in \mathcal{O}_W$ とすると，$h^{-1}(U) = f^{-1}(U) \sqcup g^{-1}(U)$ がいえることから，f, g が連続より，$h^{-1}(U) \in \mathcal{O}_+$ となるため，h は連続.
以上より，$(X + Y, \mathcal{O}_+), \tau_1, \tau_2$ の 3 つ組は X, Y の coproduct になる． □

2.4 一点結合

"一点結合"はこの発表限りの造語である．coproduct は 2 つの対象をガッと合わせたものであった．そこでそれを少しアレンジして，それぞれ一点を指定して，そこで糊付けして合わせたような対象をつくれないだろうか．もちろんイメージできるのだから作れる．だからその普遍性を考えよう．

Definition 14. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし，$x_0 : \mathbf{1} \longrightarrow X, x_1 : \mathbf{1} \longrightarrow X$ を連続写像とする．位相空間 $(X \vee_{x_0,x_1} X, \mathcal{O}_\vee)$，連続写像 $\tau_1 : X \longrightarrow X \vee_{x_0,x_1} X, \tau_2 : Y \longrightarrow X \vee_{x_0,x_1} X$ の 3 組が Top における X, x_0, x_1 の一点結合であるとは以下を満たすことをいう:
任意の位相空間 $(W, \mathcal{O}_W)$，連続写像 $f : X \longrightarrow W, g : X \longrightarrow W$ に対して，$fx_0 = gx_1$ となるとき，$h : X \vee_{x_0,x_1} X \longrightarrow W$ が存在して，$f = h\tau_1, g = h\tau_2$ となる．



一般に一点結合を構成する．

Theorem 1. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし，$x_0 : \mathbf{1} \longrightarrow X, x_1 : \mathbf{1} \longrightarrow X$ を連続写像とする．Top において X, x_0, x_1 の一点結合は存在する．

Proof. $X \vee_{x_0,x_1} X := \{(x, x_1) \mid x \in X\} \cup \{(x_0, x) \mid x \in X\}$ とする．また

$$L := \{\{x_0\} \times U \mid U \in \mathcal{O}, x_1 \notin U\} \qquad R := \{V \times \{x_1\} \mid V \in \mathcal{O}, x_0 \notin V\}$$
$$C := \{(\{x_0\} \times U) \cup (V \times \{x_1\}) \mid U, V \in \mathcal{O}, x_1 \in U, x_0 \in V\}$$

とし，$\mathcal{B}_\vee := L \cup C \cup R$ とする．
$\mathcal{B}_\vee$ が開基の条件を満たすことを示す．x_0, x_1 を除く任意の $x \in X$ に対して，$(x_0, x) \in L, (x, x_1) \in R$ であり，また

$$(x_0, x_0) \in L, \qquad (x_0, x_1) \in C, \qquad (x_1, x_1) \in R$$

がいえるため，$X = \bigcup \mathcal{B}_\vee$．次に 2 つ目の条件を場合分けで確認する．$U, V \in \mathcal{B}_\vee$ とすると，

- $U, V \in L$ のとき，$U \cap V \in L$ より問題ない．$U, V \in R$ の場合も同様.
- $U, V \in C$ のとき，$U_1, U_2, V_1, V_2 \in \mathcal{O}$ で $x_1 \in U_1, V_1$ かつ $x_0 \in U_2, V_2$ となるものが存在して，

$$U = (\{x_0\} \times U_1) \cup (U_2 \times \{x_1\}) \qquad V = (\{x_0\} \times V_1) \cup (V_2 \times \{x_1\})$$

となるため,

$$\begin{aligned}U\cap V&=((\{x_0\}\times U_1)\cup(U_2\times\{x_1\}))\cap((\{x_0\}\times V_1)\cup(V_2\times\{x_1\}))\\&=((\{x_0\}\times U_1)\cap(\{x_0\}\cap V_1))\cup((U_2\times\{x_1\})\cap(V_2\times\{x_1\}))\cup((\{x_0\}\times U_1)\cap(V_2\times\{x_1\}))\cup((U_2\times\{x_1\})\cap\\&=(\{x_0\}\times(U_1\cap V_1))\cup((U_2\cap V_2)\times\{x_1\})\cup\{(x_0,x_1)\}\cup\{(x_0,x_1)\}\\&=(\{x_0\}\times(U_1\cap V_1))\cup((U_2\cap V_2)\times\{x_1\})\end{aligned}$$

よって，$x_1\in U_1\cap V_1, x_0\in U_2\cap V_2$ より，$U\cap V\in C\subset\mathcal{B}_\vee$ となるため問題ない.

- $U\in L, V\in R$ のとき，U の任意の元の第二成分は x_1 でないが，V の任意の元の第二成分は x_1 なので，$U\cap V=\varnothing$ より問題ない.
- $U\in L, V\in C$ のとき，$U_1,V_1,V_2\in\mathcal{O}$ で $x_1\notin U_1, x_1\in V_1, x_0\in V_2$ となるものが存在して，$U=\{x_0\}\times U_1, V=(\{x_0\}\times V_1)\cup(V_2\times\{x_1\})$ となるため,

$$\begin{aligned}U\cap V&=(\{x_0\}\times U_1)\cap((\{x_0\}\times V_1)\cup(V_2\times\{x_1\}))\\&=((\{x_0\}\times U_1)\cap(\{x_0\}\cap V_1))\cup((\{x_0\}\times U_1)\cap(V_2\times\{x_1\}))\\&=(\{x_0\}\times(U_1\cap V_1))\cup\varnothing\\&=(\{x_0\}\times(U_1\cap V_1))\end{aligned}$$

より，$x_1\notin U_1\cap V_1$ より，$U\cap V\in L\subset\mathcal{B}_\vee$ となるため問題ない．$U\in R, V\in C$ のときも同様.

以上より，$\mathcal{B}_\vee$ がとある $X\vee_{x_0,x_1}X$ の位相の開基になることが示せた．その位相を $\mathcal{O}_\vee$ とする.
次に $\tau_0:X\longrightarrow X\vee_{x_0,x_1}X, \tau_1:X\longrightarrow X\vee_{x_0,x_1}X$ を $\tau_0(x)=(x_0,x), \tau_1(x)=(x,x_1)$ と定め，これらが連続であることを示す．$U\in\mathcal{B}_\vee$ とすると,

- $U\in L$ のとき，$\tau_0^{-1}(U)=U\in\mathcal{O}$ であり，$\tau_1^{-1}(U)=\varnothing\in\mathcal{O}$.
- $U\in R$ のとき，$\tau_0^{-1}(U)=\varnothing\in\mathcal{O}$ であり，$\tau_1^{-1}(U)=U\in\mathcal{O}$.
- $U\in C$ のとき，$U_1,U_2\in\mathcal{O}$ で $x_1\in U_1$ かつ $x_0\in U_2$ となるものが存在して，$U=(\{x_0\}\times U_1)\cup(U_2\times\{x_1\})$ となる．このとき，$\tau_0^{-1}(U)=U_1\in\mathcal{O}$ であり，$\tau_1^{-1}(U)=U_2\in\mathcal{O}$.

以上より，$\tau_0^{-1}(U)\in\mathcal{O}, \tau_1^{-1}(U)\in\mathcal{O}$ となるため，τ_0,τ_1 は連続.
最後に，$(X\vee_{x_0,x_1}X,\mathcal{O}_\vee), \tau_0,\tau_1$ の 3 つ組が一点結合であることを示す．$(W,\mathcal{O}_W)$ を位相空間，$f,g:X\longrightarrow W$ を $fx_0=gx_1$ となる連続写像とする．ここで $h:X\vee_{x_0,x_1}X\longrightarrow W$ を

$$h(x):=\begin{cases}f(s) & x=(x_0,s)\quad(^\exists s\in X)\\ g(t) & x=(t,x_1)\quad(^\exists t\in X)\end{cases}$$

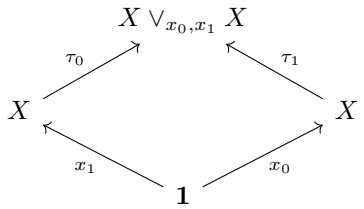
と定める ($x=(x_0,x_1)$ のときに関しては $fx_0=gx_1$，つまり $f(x_0)=g(x_1)$ より問題ない)．すると，$f=h\tau_1, g=h\tau_2$ が成り立つ．h の連続性に関しては，$U\in\mathcal{O}_W$ とすると,

$$h^{-1}(U)=\big(\{x_0\}\times f^{-1}(U)\big)\cup\big(g^{-1}(U)\times\{x_1\}\big)$$

であり，$x_1\notin f^{-1}(U)$，つまり $f(x_1)\in U$ のとき，$\big(\{x_0\}\times f^{-1}(U)\big)\in L$ であり，また $g(x_0)=f(x_1)\notin U$，つまり $x_0\notin g^{-1}(U)$ より，$\big(g^{-1}(U)\times\{x_1\}\big)\in R$. よって，$h^{-1}(U)\in\mathcal{O}_\vee$. $x_1\in f^{-1}(U)$，つまり $f(x_1)\in U$ のときも，$g(x_0)=f(x_1)\notin U$，つまり $x_0\notin g^{-1}(U)$ より，$h^{-1}(U)\in C\subset\mathcal{O}_\vee$. よって，$h$ が連続であることがいえた．別の候補を取ったとしても，可換性からそれは h にならざるを得ないため，以上から $(X\vee_{x_0,x_1}X,\mathcal{O}_\vee)$，$\tau_0,\tau_1$ の 3 つ組が一点結合であることが示せた. □

以下，$X\vee_{x_0,x_1}X$ の開集合に関するポイントをまとめる：

- $U \in \mathcal{O}$ が $x_1 \notin U$ なら，$\tau_0(U) \in \mathcal{O}_\vee$
- $U \in \mathcal{O}$ が $x_0 \notin U$ なら，$\tau_1(U) \in \mathcal{O}_\vee$
- $U, V \in \mathcal{O}$ が $x_1 \in U, x_0 \in V$ なら，$\tau_0(U) \cup \tau_1(V) \in \mathcal{O}_\vee$



Example 8. $\phi : [0,2] \longrightarrow I \vee_{0,1} I$ を

$$\phi(x) := \begin{cases} (0,x) & (0 \leq x < 1) \\ (0,1) & x = 1 \\ (x,1) & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

とすると，ϕ は全単射になり，$\mathcal{B}_\vee$ をこの一対一対応で移した集合族は $[0,2]$ の開基となるため，$[0,2] \simeq_{\mathrm{Top}} I \vee_{0,1} I$．また，$\theta_0, \theta_1 : I \longrightarrow [0,2]$ を $\theta_0(x) = x, \theta(x) = x+1$ で定義すると，

$$\theta_0 = \phi^{-1}\tau_0 \qquad \theta_1 = \phi^{-1}\tau_1$$

より，$[0,2], \theta_0, \theta_1$ は $I, 0, 1$ の一点結合であるといえる．

3 interval の普遍性

interval の普遍性を述べるための準備をする．

Definition 15. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．
$x \in X$ に対して，$\{x\}$ が閉集合のとき，x を closed point という．
位相空間 X とその closed point $x_0, x_1 \quad (x_0 \neq x_1)$ の 3 つ組 (X, x_0, x_1) を bipointed space という．
$(X, x_0, x_1), (Y, y_0, y_1)$ を bipointed space とする．連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ が $f(x_0) = y_0$ かつ $f(x_1) = y_1$ を満たすとき，f を bipointed continuous map という．

Proposition 12. (X, x_0, x_1) を bipointed space としたとき，$(X \vee_{x_0,x_1} X, x_{00}, x_{11})$ は bipointed space である．ただし $x_{00} := (x_0, x_0), x_{11} := (x_1, x_1)$ とする．

Proof. x_{00} と x_{11} が closed point であることを示せばよい．x_0 が closed point であることから，$X \backslash \{x_0\}$ は開集合．よって

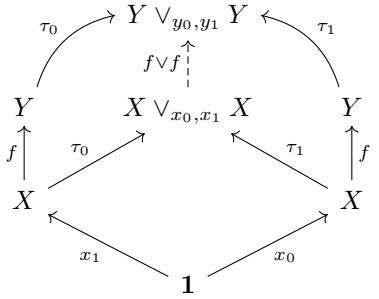
$$(X \vee_{x_0,x_1} X) \backslash \{x_{00}\} = \tau_0 (X \backslash \{x_0\}) \cup \tau_1(X) \in \mathcal{O}_\vee$$

となり，x_{00} は closed point ．x_{11} も同様にいえる． □

$(X, x_0, x_1), (Y, y_0, y_1)$ を bipointed space とし，$f : X \longrightarrow Y$ を bipointed continuous map とする．このとき，

$$\tau_0 f x_1 = \tau_0 y_1 = \tau_1 y_0 = \tau_1 f x_0$$

より, $X\vee_{x_0,x_1}X$ の一点結合の性質から, $\tau_1 f, \tau_0 f : X \longrightarrow Y\vee_{y_0,y_1}Y$ に対して, $h : X\vee_{x_0,x_1}X \longrightarrow Y\vee_{y_0,y_1}Y$ がただ一つ存在して，$\tau_0 f = h\tau_0, \tau_1 f = h\tau_1$ となる（τ_0, τ_1 に関して記号の濫用をしているが定義域をみれば判断がつく）．このとき h を $f \vee f$ とかく．



このとき $f \vee f$ は bipointed continuous map である．実際，可換性より，

$$(f \vee f)x_{00} = (f \vee f)\tau_0 x_0 = \tau_0 f x_0 = \tau_0 y_0 = y_{00}$$

となる．同様に $(f \vee f)x_{11} = y_{11}$.

主定理証明のため，I の開基を考える．

Lemma 1. $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$J_n := \left\{\left(2^{-n}k, 2^{-n}(k+2)\right) \mid k = 0, 1, \cdots, 2^n - 2\right\} \cup \left\{[0, 2^{-n}), (1 - 2^{-n}, 1]\right\}$$

とし，$\mathcal{J} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{J}_n$ とする．このとき，$\mathcal{J}$ は I の開基になる．

Proof. $(0,1) \cup [0,1) \cup (0,1] = I$ より，$\bigcup \mathcal{J} = I$.
$U, V \in \mathcal{J}$ とし，$x \in U \cap V$ とすると，$x \neq 0, 1$ のとき，

$$2^{-n}k < x < 2^{-n}l \qquad (^\exists n, k \in \mathbb{N})$$

とできる．ここで，

$$x \in (2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)) \cup (2^{-n}(k+1) - 2^{-(n+1)}, 2^{-n}(k+1) + 2^{-(n+1)}) \cup (2^{-n}(k+1), 2^{-n}(k+2)) \cup \cdots \cup (2^{-n}(l-1), 2^{-n}l)$$

より，x はいずれかの $U \cap V$ に含まれる $\mathcal{J}$ の元に属す．$x = 0$ のとき，$0 \leq x < 2^{-n} \quad (^\exists n \in \mathbb{N})$ より，

$$x \in [0, 2^{-(n+1)}) \subset U \cap V$$

とできる．$x = 1$ のときも同様. □

以下本発表のメインである interval の普遍性を述べる．

Theorem 2. (X, x_0, x_1) を bipointed space , $f : X \longrightarrow X \vee_{x_0,x_1} X$ を bipointed continuous map とすると，bipointed continuous map $r : X \longrightarrow I$ で以下を可換にするものが存在する：

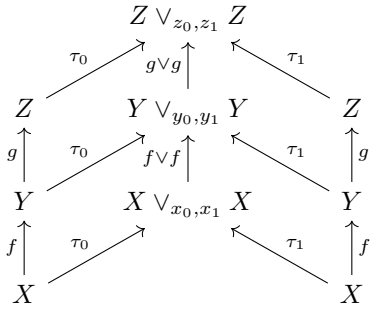
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & X \vee_{x_0,x_1} X \\ \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle r\vee r} \\ I & \xrightarrow{\quad \delta \quad} & I \vee_{0,1} I \end{array}$$

Proof. いつかちゃんと書きます．ここがメインです．いつまでたってもかかない気がするので，直接聞きたかったら DM まで. □

最後に上の定理の性質で interval を本当に定めきれるのかどうかを確認する．

Lemma 2. $(X, x_0, x_1), (Y, y_0, y_1), (Z, z_0, z_1)$ を bipointed space とし，$f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$ を bipointed continuous map とすると，$(g \vee g)(f \vee f) = (gf) \vee (gf)$

Proof. 各々の可換性より，$\tau_0 gf = (g \vee g)(f \vee f)\tau_0, \tau_1 gf = (g \vee g)(f \vee f)\tau_1$ となるため，この条件を満たす射の一意性から，$(g \vee g)(f \vee f) = (gf) \vee (gf)$.



□

Theorem 3. bipointed space (J, j_0, j_1) と $\gamma : J \longrightarrow J \vee_{j_0,j_1} J$ の組も上の定理の性質を満たすならば，$I \simeq J$.

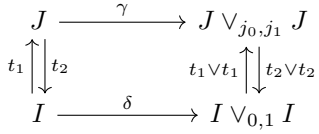
Proof. 両者の性質から，２つの bipointed continuous map

$$t_1 : I \longrightarrow J \qquad t_2 : J \longrightarrow I$$

が存在し，$\gamma t_1 = (t_1 \vee t_1)\delta$，また $\delta t_2 = (t_2 \vee t_2)\gamma$ が成り立つ．$t_2 t_1$ について考えると，これはまた bipointed continuous map となり，

$$\delta t_2 t_1 = (t_2 \vee t_2)\gamma t_1 = (t_2 \vee t_2)(t_1 \vee t_1)\delta$$

となり，同じ性質を $\mathrm{id}_I : I \longrightarrow I$ も満たすため，射の一意性から $t_2 t_1 = \mathrm{id}_I$．同様に $t_1 t_2 = \mathrm{id}_J$ もいえるため，$I \simeq J$.



□

参考文献

[1] E. Riehl. *Category Theory in Context.* Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017.

[2] 杉浦光夫. 解析入門 I. 東京大学出版会, 1980.

[3] 内田伏一. 集合と位相. 裳華房, 1968.